*שיעור שמיני*

**מבנים דיסקרטיים**

**המשך פונקציות יוצרות:**

***תבנית כללית:***

*כמה פתרונות יש מעל המשוואה:*

*תחת האילוצים:*

*יהי מספר הפתרונות, אז הפונקציה היוצרת של היא:*

***תרגיל:***

*יש לנו סוכריות ויש ילדים , לילד מותר לקבל מספר זוגי של סוכריות, לילד מותר לקבל 5,6,8 סוכריות, והילד חייב לקבל לפחות 4 סוכריות,*

*נגדיר = מספר הדרכים לחלק את הסוכריות לילדים, נמצא פונצקיה יוצרת ל- כלומר כאשר מספר סוכריות ל- וכו, והאילוצים הם:*

*לכן הפונקציה היוצרת תיהיה:*

***למה זה עובד?***

*למשל נבחר , נפתח סוגריים אך נתמקד רק ב-:*

*או או יהיה שווה ל- כלומר 3 דרכים לחלק את הסוכריות ב-,*

*חילוק הסוכריות: ,*

*לאחר פתיחת סוגריים:*

***שני נוסחאות חשובות:***

1. *טור גאומטרי סופי:*
2. *טור גאומטרי אינסופי:*

***תרגיל:***

*יש לנו כדורים זהים ו-3 תאים,*

*בתא הראשון מותר עד 10 כדורים, בתא השני מותר עד 20 כדורים, בתא השלישי אין הגבלה,*

*נגדיר = מספר הדרכים לחלק את הכדורים, נמצא את הפונקציה היוצרת ל-:*

***הבעיה הקלאסית של הילדים והסוכריות:***

*יש לנו סוכריות ו-5 ילדים,*

***תזכורת:*** *מספר דרכים הוא .*

*מצד שני הפונקציה היוצרת:*

*מסקנה:*

*אם עכשיו נעשה באופן כללי ילדים במקום 5 אז:*

*נוסחה זו נקראת* ***הבינום השלילי****, הבינום הרגיל הוא והבינום השלילי הוא ולכן נראה שלילי.*

***תרגיל:***

*מצא את הפונקציה היוצרת של מספר דרכים לחלק כדורים שונים ל-7 תאים?*

*התבנית הכללית לא רלוונטית לתרגיל זה כיוון שהכדורים שונים, איך היינו פותרים את הבעיה הזאת ללא פונקציה יוצרת? כיוון שלכל כדור יש 7 אפשרויות להיות בתא שונה, ולכן הפונקציה היוצרת היא:*

***תרגיל:***

*כמה מספרים יש קטנים ממליון עם סכום ספרות 23?*

*למשל – 174065, 995*

*במילים אחרות יש לנו 6 ספרות אילוצים: כאשר ,*

*פתרון: במקום 23 נכתוב , נגדיר מספר המספרים קטנים ממליון עם סכום ,*

*נקבל:*

*הבינום הרגיל:*

*הבינום השלילי:*

*רוצים את המקדם של :*

***פיתרון ללא פונקציות יוצרות:***

*23 סוכריות, 6 ילדים, כל ילד מותר עד 9 סוכריות,*

*נגדיר את = כמות אפשרויות לחלק לכלל הילדים את הסוכריות , נגדיר*  = כמות לחלק לילד כאשר ,

רוצים למצוא את , קודם ניתן לילד הראשון נחלק 10 סוכריות ואת כל היתר שזה 13 נחלק לשאר הילדים , ניתן לילד הראשון 10 סוכריות ולילד השני 10 סוכריות ואז נחלק בין כל שאר היחיתוכים הזוגיים , נשים לב כי ונקבל לפי הכלה והדחה:

**תרגיל (הוכחה שלשני בעיות שונות יש אותו פתרון):**

נתון כדורים זהים ו-3 תאים,

בעיה 1:

בתא הראשון לפחות כדור 1, בתא השני מספר כדורים מתחלק ב-3

בעיה 2:

בתא השני מספר זוגי של כדורים, ובתא השלישי מספר כדורים שאינו מתחלק ב-3

יש להוכיח כי לשתי הבעיות יש אותו פתרון:

דוגמה , לפי בעיה ראשונה , לפי בעיה שניה (הרעיון הוא שיש פונקציה חח"ע ועל בין שני הבעיות ולכן יש להם את אותו הפתרון).

פונקציה יוצרת לבעיה 1:

*פונקציה יוצרת לבעיה 2:*

*ולכן:*

**סדרת הסכומים וסדרת ההפרשים:**

***דוגמה:***

***סדרת הסכומים של :***

*כלומר:*

***סדרת ההפרשים של :***

*כלומר:*

***סדרת ההפרשים של :***

*כלומר חזרנו ל- ולכן ,*

*ואם נעשה סדרת הסכומים של :*

*כלומר חזרנו ל- ולכן ,*

*ולכן סדרת הסכומים וסדרת ההפרשים הם פעולות הפוכות,*

*נתונה סדרה נניח ש- היא הפונקציה היוצרת של ש,*

*מהי הפונקציה היוצרת של* ***סדרת הסכומים*** *של ?*

***סדרת הסכומים של היא:***

*איזה פעולה נעשה ל- כדי לקבל את פונקצית הסכומים שלה?*

***מסקנה:***

*אם היא פונקציה היוצרת של אז הפונקציה היוצרת של סדרת הסכומים של היא*

***כלומר סדרת הסכומים – לחלק ב-, וסדרת ההפרשים – להכפיל ב-.***

***תרגיל:***

*כמה מספרים יש קטנים ממילון עם סכום ספרות לכל היותר 31?*

*כאשר ,*

*נגדיר את להיות מספר המספרים עד מילון עם סכום ספרות = ,*

*כאשר ,*

*פונקציה יוצרת של :*

*נגדיר = מספר המספרים כד מליון עם סכום ספרות עד כלומר:*

*ולכן היא סדרת הסכומים של , הפוקנציה היוצרת של היא*

*רוצים את , איך ניתן לקבל את ?*